

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ
ΑΝΩΣΤΙΚΗΣ ΦΛΕΒΑΣ ΣΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΑΠΟΔΕΚΤΗ
Αριστείδης Α. Μπλούτσος¹, Παναγιώτης Χρ. Γιαννόπουλος^{1*}**

¹Εργαστήριο Τεχνολογίας του Περιβάλλοντος, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Πατρών, 265 04 Πάτρα
*Η.τ.: yannopp@upatras.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Εφαρμόζοντας την ολοκληρωματική μέθοδο προβλέπονται τα μέσα χαρακτηριστικά του πεδίου ροής από την εκροή οριζόντιας κυκλικής τυρβώδους φλέβας άνωσης εντός κινούμενου υδάτινου αποδέκτη. Οι διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων της συνεχείας, της ορμής και της διατήρησης της μάζας του ιχνηθέτη εκφράζονται σε ένα σύστημα κυλινδρικών καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Η συμβολή των φαινομένων 2^{ου} τάξεως λαμβάνεται υπόψη στις εισροές ορμής και άνωσης. Οι εξισώσεις ολοκληρώνονται στην εγκάρσια επιφάνεια της φλέβας. Το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων που προκύπτει επιλύεται αριθμητικά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξεως, θεωρώντας μη γραμμική την εξάπλωση της φλέβας. Τα αποτελέσματα των χαρακτηριστικών του πεδίου ροής συγκρίνονται με πειραματικά δεδομένα παρουσιάζοντας αρκετά καλή συμπεριφορά.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Κυκλική φλέβα άνωσης, οριζόντια εκροή, κινούμενος αποδέκτης, κυλινδρικές καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, πεδίο ροής

**SIMULATION OF A HORIZONTAL ROUND TURBULENT
BUOYANT JET IN A CURRENT
Aristeides A. Bloutsos¹, Panayotis C. Yannopoulos^{1*}**

¹Environmental Engineering Laboratory, Department of Civil Engineering
University of Patras, 265 04 Patras, Greece
*E-mail: yannopp@upatras.gr

ABSTRACT

The mathematical description of a horizontal round turbulent buoyant jet in a uniform moving environment is based on the time-averaged partial differential equations of continuity, momentum and conservation of tracer mass in a curvilinear system of cylindrical coordinates. Applying second order mathematical approximation, the contribution of turbulence to momentum and buoyancy fluxes has been taken into account. The final equations are integrated on the cross-sectional area of the jet applying similarity assumption and actual boundary conditions. A system of ordinary differential equations is produced which is solved numerically using the 4th order Runge-Kutta method, assuming a nonlinear jet spreading. The results regarding centerline trajectories and dilutions are compared to experimental data available in the literature showing a good performance of the model.

KEY WORDS: Round buoyant jet; horizontal discharge; moving environment; curvilinear cylindrical coordinates; flow field

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η τελική διάθεση των υγρών αστικών και βιομηχανικών αποβλήτων, κατόπιν της απαιτούμενης επεξεργασίας, γίνεται συνήθως σε υδάτινους αποδέκτες μεγάλου όγκου ύδατος (θάλασσες, ποταμούς, λίμνες) μέσω υποθαλασσίων αγωγών προσαγωγής των αποβλήτων στον διαχύτη. Ο διαχύτης αποτελείται από ακροφύσια, συνήθως κατακόρυφα, οριζόντια ή κεκλιμένα, αναλόγως των τοπικών συνθηκών του αποδέκτη και των ειδικών απαιτήσεων σχεδιασμού. Παρόμοια συστήματα σχεδιάζονται επίσης για τη διάθεση των αποβλήτων από εγκαταστάσεις αφαλάτωσης καθώς και για την απόρριψη θερμού ύδατος που προκύπτει από ψύξη μηχανών παραγωγής ενέργειας. Η διάθεση αερίων ρύπων και καπνού στην ατμόσφαιρα από βιομηχανικές εγκαταστάσεις και σταθμούς παραγωγής ενέργειας, καθώς και η απόρριψη αερίων θερμικών αποβλήτων, πραγματοποιείται με καμινάδες και πύργους ψύξεως. Η πρόβλεψη των πεδίων ροής και μίξεως που λαμβάνουν χώρα σε όλες τις προαναφερόμενες περιπτώσεις γίνεται με παρόμοιες μαθηματικές και υπολογιστικές μεθόδους (Fischer et al., 1979, Doneker & Jirka, 1988-2007, Schnelle and Dey, 2000, Lee and Chu, 2003).

Στην παρούσα εργασία αναπτύσσεται θεωρητικά η προσομοίωση της διάχυσης ρευστού το οποίο εξέρχεται οριζόντια από κυκλική πηγή σε κινούμενο και ομοιόμορφο αποδέκτη, του οποίου η πυκνότητα διαφέρει λίγο από την αρχική πυκνότητα του διαχεόμενου ρευστού. Η θεωρητική αντιμετώπιση του φαινομένου γίνεται χρησιμοποιώντας τη διαδεδομένη ολοκληρωματική μέθοδο που συνήθως εφαρμόζεται στην πρόβλεψη του πεδίου ροής ανωστικών φλεβών (Jirka, 2004). Τα ολοκληρωματικά μοντέλα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τον τρόπο πλήρωσης του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (Lee and Chu, 2003). Η πρώτη κατηγορία στηρίζεται στην υπόθεση της συμπαράσυρσης (Schatzmann, 1979) ενώ η δεύτερη σε εκείνη της εγκάρσιας διασποράς (Lee & Jirka, 1981). Έτσι αποκτάται ημιεμπειρικά μια εξίσωση αναγκαία για την πλήρωση και επίλυση του συστήματος των εξισώσεων συνεχείας, ορμής και διάχυσης. Τα εν λόγω μοντέλα από πλευράς μαθηματικής προσέγγισης είναι 1^{ης} τάξεως, καθόσον οι όροι 2^{ας} τάξεως που προκύπτουν κατά την ολοκλήρωση, αναφορικά με τις τυρβώδεις συνεισφορές στις εισροές ορμής και ανώσεως, καθώς και η δυναμική πίεση έχουν παραληφθεί ή δεν έχουν ληφθεί υπόψη χωριστά. Οι προσεγγίσεις αυτές σε ορισμένες περιπτώσεις είναι αιτία για σημαντικές αποκλίσεις από τις πειραματικές παρατηρήσεις.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης γίνεται με τα πειραματικά αποτελέσματα της εργασίας του Ayoub (1971). Τα συγκεκριμένα δεδομένα αναφέρονται σε οριζόντιες κυκλικές φλέβες και αφορούν μετρήσεις τροχιών και αξονικών αραιώσεων και χρησιμοποιούνται άμεσα από την παρούσα εργασία. Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν πειραματικά αποτελέσματα και άλλων ερευνητών τα οποία όμως παρουσιάζονται με ελλιπή στοιχεία, επομένως δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Καινοτομίες της παρούσας εργασίας είναι, αφενός, η ακριβής μαθηματική περιγραφή μέσω καμπυλόγραμμου συστήματος ορθογωνίων συντεταγμένων και, αφετέρου, η εφαρμογή της ολοκληρωματικής μεθόδου 2ας τάξεως, ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία με την προτεινόμενη από τον πρώτο συγγραφέα για κατακόρυφες δισδιάστατες και κυκλικές φλέβες με άνωση (Yannopoulos, 2006). Η σχετικώς καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων του προτεινόμενου μοντέλου με πειράματα από τη διεθνή βιβλιογραφία, ιδιαίτερος όσον αφορά τις τροχιές και τις αραιώσεις, επιβεβαιώνει την αξιοπιστία του μοντέλου, το οποίο δύναται να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο κατά το σχεδιασμό συστημάτων διάθεσης υγρών, θερμικών και αερίων αποβλήτων σε ομοειδή περιβάλλοντα. Επίσης, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί

για την επαλήθευση πολύπλοκων αριθμητικών μοντέλων, αλλά και για εργαστηριακές μελέτες σχετικών ομοιωμάτων.

Το πεδίο ροής της οριζόντιας τυρβώδους κυκλικής φλέβας εντός κινούμενου περιβάλλοντος ρευστού προσδιορίζεται από τις αρχικές εισροές όγκου μ_0 , ορμής m_0 και άνωσης β_0 , την αξονική απόσταση ξ από το ακροφύσιο εξόδου, την ταχύτητα του ρεύματος u_a και τη γωνία ω . Οι αρχικές ποσότητες των εισροών περιγράφονται από τις σχέσεις $\mu_0 = A_0 w_{d0}$, $m_0 = A_0 w_{d0}^2$, $\beta_0 = g_0' A_0 w_{d0} c_0$ όπου $g_0' = g (\rho_a - \rho_0) / \rho_0$, $A_0 = \pi D^2 / 4 = \eta$ επιφάνεια του στομίου εξόδου, $D = \eta$ διάμετρος του ακροφυσίου, $\rho_0 = \eta$ πυκνότητα του ρευστού στην έξοδο, $\rho_a = \eta$ πυκνότητα του αποδέκτη, $w_{d0} = \eta$ αρχική ταχύτητα εξόδου και η συγκέντρωση του ιχνηθέτη στην έξοδο του ακροφυσίου είναι $c_0 = 1$. Μέσω της διαστατικής ανάλυσης προκύπτει ότι το πρόβλημα περιγράφεται από τέσσερις αδιάστατες μεταβλητές. Αυτές οι μεταβλητές είναι ο αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude $F_0 = w_{d0} (g_0' D)^{-1/2}$, η ανηγμένη ταχύτητα ρεύματος $U_a^* = u_a / \beta_0^{1/3} = (u_a / w_{d0}) F_0$ που αντιστοιχεί σε ένα τύπο Froude ρεύματος/φλέβας, η γωνία ω του επιπέδου της φλέβας ως προς την οριζόντια και η ανηγμένη αξονική απόσταση $X = (\xi / D) F_0^{-1}$, ή διαφορετικά οι αδιάστατες τεταγμένες $X = (x / D) F_0^{-1}$ και τετμημένες $Z = (z / D) F_0^{-1}$ που προσδιορίζουν τον άξονα της φλέβας.

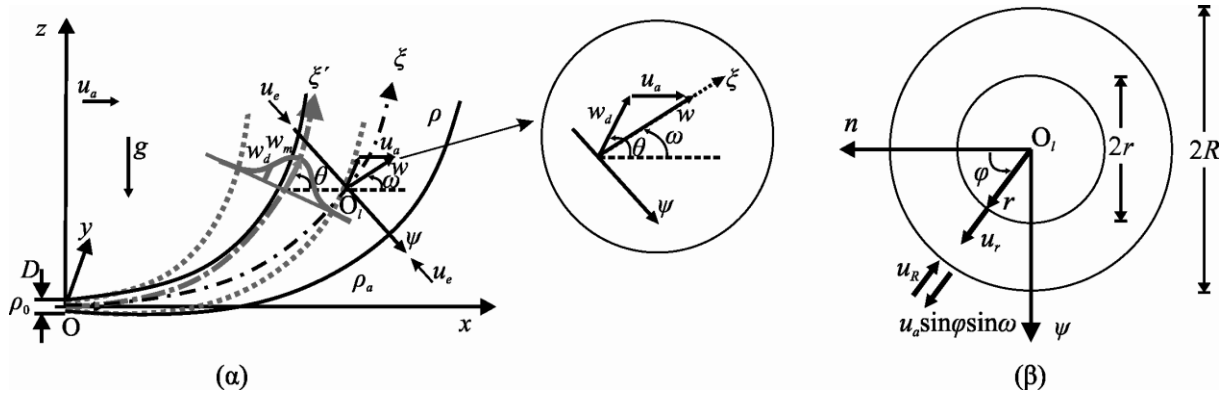
Η παρούσα εργασία καινοτομεί καθώς ενσωματώνει την ακριβή περιγραφή του πεδίου ροής μέσω καμπυλόγραμμου συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων και την εφαρμογή της ολοκληρωματικής μεθόδου 2ας τάξεως, ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία με την προτεινόμενη από τον δεύτερο συγγραφέα για κατακόρυφες δισδιάστατες και κυκλικές φλέβες με άνωση (Yannopoulos, 2006). Η ανάπτυξη του μοντέλου οδηγεί στην πρόβλεψη της τροχιάς, των μέσων αξονικών ταχυτήτων και αξονικών αραιώσεων μιας οριζόντιας κυκλικής τυρβώδους φλέβας με άνωση εντός κινούμενου ομοιόμορφου υδάτινου αποδέκτη. Η καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων του προτεινόμενου μοντέλου με πειράματα από τη διεθνή βιβλιογραφία επιβεβαιώνει την αξιοπιστία του μοντέλου. Έτσι, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στο σχεδιασμό συστημάτων διάθεσης υγρών, θερμικών και αερίων αποβλήτων σε αυτές τις συνθήκες. Επίσης, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την επαλήθευση πολύπλοκων αριθμητικών μοντέλων, αλλά και για εργαστηριακές μελέτες σχετικών ομοιωμάτων.

2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ

Θεωρείται κυκλική φλέβα με άνωση αρχικής πυκνότητας ρ_0 , η οποία εκρέει από κυκλικό ακροφύσιο διαμέτρου D , εντός κινούμενου ρευστού αποδέκτη ταχύτητας u_a μεγάλων διαστάσεων και ομοιόμορφης πυκνότητας ρ_a . Στην έξοδο, το ρευστό της φλέβας έχει αρχική οριζόντια ταχύτητα w_{d0} και πυκνότητα ρ_0 , λίγο μικρότερη από την πυκνότητα του περιβάλλοντος ρευστού ($\rho_a \geq \rho_0$). Η φλέβα διαγράφει καμπυλόγραμμη τροχιά λόγω των δυνάμεων ορμής και άνωσης. Τα αναπτυσσόμενα πεδία ροής και μίξεως σε κάθε εγκάρσια διατομή της φλέβας θεωρείται ότι παραμένουν αρκούντως συμμετρικά ως προς τον άξονά της. Ο άξονας της φλέβας συνήθως ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος όπου παρουσιάζεται η μεγιστοποίηση των τιμών των μέσων ταχυτήτων ή συγκεντρώσεων και το επίπεδό του είναι παράλληλο στη διεύθυνση ροής του περιβάλλοντος ρευστού (coflowing). Το σχηματιζόμενο πεδίο ροής περιγράφεται μαθηματικά χρησιμοποιώντας ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $O(x,y,z)$ και ένα σύστημα καμπυλόγραμμων κυλινδρικών συντεταγμένων $O(r,\varphi,\xi)$. Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται η μορφή των πεδίων ροής και μίξεως που σχηματίζονται, καθώς και τα συστήματα συντεταγμένων. Οι εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων προσεγγίζονται αρκετά καλά με κατανομές τύπου Gauss. Η

υπερέχουσα ταχύτητα w_d ακολουθεί τη Gauss κατανομή όντας συμμετρική ως προς τον άξονα ξ' και σχηματίζοντας γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Σημειώνεται ότι ο άξονας ξ' θα ήταν ο άξονας της τροχιάς της φλέβας, εάν ο αποδέκτης ήταν ακίνητος. Η ύπαρξη του ρεύματος στο περιβάλλον ρευστό μετατοπίζει τη φλέβα στον άξονα ξ . Έτσι, η υπερέχουσα ταχύτητα που εισέρχεται στο σύστημα των εξισώσεων που περιγράφουν μαθηματικά τη ροή είναι η γεωμετρική προβολή της υπερέχουσας ταχύτητας w_d στον άξονα ξ .



Σχήμα 1: Πεδίο ροής και διάχυσης κυκλικής ανωστικής φλέβας σε κινούμενο αποδέκτη (α) κάτοψη (β) τομή.

2.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Η μαθηματική περιγραφή του φαινομένου βασίζεται στις διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων της συνεχείας, της ορμής και της διατήρησης της μάζας του διαχεόμενου ρευστού (ιχνηθέτη) σε σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων. Η διατύπωσή τους γίνεται βάσει της παραδοχής Reynolds, κατά την οποία κάθε βασική μεταβλητή X του προβλήματος δύναται να αναλυθεί σε άθροισμα της μέσης της τιμής \bar{X} και της διακύμανσής της X' , οι εξισώσεις μετασχηματίζονται σε εξισώσεις μέσης ροής και διάχυσης. Στις εξισώσεις αυτές οι όροι μοριακού ιξώδους παραλείπονται, επειδή είναι πολύ μικροί συγκριτικά με τους αντίστοιχους όρους τυρβώδους ιξώδους, οι οποίοι διατηρούνται. Λαμβάνονται υπόψη οι συνήθεις βασικές παραδοχές-προσεγγίσεις, όπως Boussinesq για μικρές αρχικές διαφορές πυκνοτήτων, τύπου οριακού στρώματος του Prandtl, αμελητέας μοριακής διάχυσης συγκριτικά με την τυρβώδη, παραβολικού τύπου ροής κατά την κύρια διεύθυνση και ανυπαρξίας περιδίνησης (Yannopoulos, 2006). Επίσης περιλαμβάνονται οι όροι 2ας τάξεως, οι οποίοι εισάγουν τη συμβολή της τύρβης στις εισροές της ορμής και της ανώσεως. Στη συνέχεια, οι εξισώσεις μετασχηματίζονται στο καμπυλόγραμμο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων $O_I(r, \varphi, \xi)$ και καταλήγουν στις ακόλουθες μορφές:

Συνεχείας:

$$\frac{\partial(rw)}{\partial \xi} + \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = 0 \tag{2.1}$$

Ορμή στη διεύθυνση ξ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[r \left(w^2 + w'^2 + \frac{P_d}{\rho_0} \right) \right] + \frac{\partial(rhuw)}{\partial r} + r \sin \varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = g'_0 r h c \sin \omega + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rh\tau_{r\xi})}{\partial r} \tag{2.2}$$

Ορμή στη διεύθυνση ψ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[r \sin \phi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \right] + \frac{\partial (r \sin \phi hu^2)}{\partial r} - r \left(w^2 + w'^2 + \frac{P_d}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = -g'_0 r h c \cos \omega - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (r \sin \phi h P_d)}{\partial r} \quad (2.3)$$

Διατήρησης της μάζας του ιχνηθέτη:

$$\frac{\partial [r(wc + w'c')]}{\partial \xi} + \frac{\partial (rhuc)}{\partial r} = -\frac{\partial (rhu'c')}{\partial r} + S_1 \quad (2.4)$$

όπου $h = 1 + r \sin \phi d\omega/d\xi$ είναι ο μετρικός συντελεστής του συστήματος συντεταγμένων, ω η γωνία του άξονα της φλέβας στη θέση ξ ως προς το οριζόντιο επίπεδο, u , w και u' , w' οι μέσες και διακυμαινόμενες ταχύτητες ροής στην ακτινική και τη διαμήκη διεύθυνση αντιστοίχως, $c = (\rho_\alpha - \rho)/(\rho_\alpha - \rho_0)$ οι μέσες και c' οι διακυμαινόμενες συγκεντρώσεις του ιχνηθέτη, ρ είναι η μέση πυκνότητα, w'^2 , $w'c'$, $u'c'$ οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w , u και c , αντιστοίχως, $\tau_{r\xi}$ η μέση τυρβώδης διατμητική τάση, p_d η δυναμική πίεση, $g'_0 = g(\rho_\alpha - \rho_0)/\rho_0$ η φαινόμενη επιτάχυνση της βαρύτητας στην έξοδο της φλέβας και S_1 είναι ο όρος πηγής, εφ' όσον υφίσταται. Η μέση συγκέντρωση στην έξοδο της φλέβας άνωσης έχει τιμή $c_0=1$.

2.3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Στη Ζώνη Εγκαταστημένης Ροής (ZEF) θεωρείται ότι η ροή απλώς μεταφέρεται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, όπου w είναι η ταχύτητα της ροής και w_d η υπερέχουσα ταχύτητα. Υποθέτοντας ότι η ταχύτητα του περιβάλλοντος ρεύματος είναι μικρή συγκριτικά με τη μέση ταχύτητα της ανωστικής φλέβας, η κατανομή των περιοδικών στροβίλων παραμένει ανεπηρέαστη καθώς κινείται με τη ταχύτητα του περιβάλλοντος ρευστού u_a . Συνεπάγεται, επομένως, ότι η εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας της ανωστικής φλέβας εξακολουθεί να ακολουθεί την κατανομή τύπου Gauss (Davidson et al., 2002) σύμφωνα με την εξίσωση:

$$w_{d\xi} = w_d \cos(\theta - \omega) = w_m \exp \left[-\left(\frac{r}{b_w} \right)^2 \right] \cos(\theta - \omega) \quad (2.5)$$

όπου w_m είναι η μέση υπερέχουσα ταχύτητα στον άξονα ξ' της φλέβας. Το ονομαστικό πλάτος της φλέβας για το πεδίο των ταχυτήτων b_w προσδιορίζεται από εκείνο το σημείο της Gauss κατανομής στο οποίο η τιμή της ταχύτητας λαμβάνει την $1/e$ της μέγιστης τιμής. Ο ρυθμός εξάπλωσης της φλέβας άνωσης προσδιορίζεται από την παρακάτω ημιεμπειρική εξίσωση (Wood, 1993, Lee & Seo, 2000, Davidson & Wang, 2002, Kim et al., 2002).

$$\frac{db_w}{d\xi} = \frac{K_s}{1 + C_{jk} \frac{U_a \cos \omega}{w_m}} \quad (2.6)$$

όπου C_{jk} είναι εμπειρική σταθερά. Οι Wood et al. (1993), Knudsen (1988) προτείνουν ότι $C_{jk} = 1$, ενώ οι Chu et al. (1999), Wright (1994) προτείνουν την τιμή 2. Η σταθερά K_s είναι η τιμή του συντελεστή διεύρυνσης της κυκλικής ανωστικής φλέβας σε ακίνητο

αποδέκτη (Davidson & Wang, 2002). Στην παρούσα εργασία ελήφθησαν $C_{jk} = 2$ και $K_s = 0.110$ (Yannopoulos, 2006).

Η εγκάρσια κατανομή των συγκεντρώσεων c θεωρείται ότι ακολουθεί τη Gauss κατανομή στη Ζώνη Εγκατάστασης της Ροής (ZFE) και εκτός αυτής (ZEF) σύμφωνα με την ακόλουθη μαθηματική διατύπωση:

$$c = c_m \exp \left[- \left(\frac{r}{b_c} \right)^2 \right], \quad (2.7)$$

όπου c_m είναι η μέση τιμή της συγκέντρωσης στον άξονα της φλέβας. Το ονομαστικό πλάτος b_c των συγκεντρώσεων προσδιορίζεται από εκείνο το σημείο της Gauss κατανομής στο οποίο η τιμή της συγκέντρωσης λαμβάνει την $1/e$ της μέγιστης και $b_c = \lambda b_w$. Πρακτικά το όριο της τυρβώδους φλέβας εκτείνεται μέχρι τη θέση $B_w = B/2 + r_b b_w$ (Yannopoulos & Bloutsos, 2012). Κατά την ολοκλήρωση του συστήματος των εξισώσεων με μερικές παραγώγους (2.1)-(2.4) ο συντελεστής r_b λαμβάνει την τιμή $\sqrt{2}$.

Σε κινούμενο αποδέκτη, η συμπαράσυρση του περιβάλλοντος ρευστού που προκαλείται από την κίνηση της ανωστικής φλέβας οφείλεται στην υπερέχουσα ταχύτητα. Η συμπαράσυρση στη τυρβώδη περιοχή έχει τρεις συνιστώσες: η πρώτη πηγάζει από την κατανομή τύπου Gauss, η δεύτερη οφείλεται στην παρουσία της κίνησης του αποδέκτη και η τρίτη οφείλεται στο ζεύγος των στροβίλων (vortex pair) που δημιουργείται από την αλληλεπίδραση της ανωστικής φλέβας και του ρεύματος. Στην παρούσα εργασία η κίνηση του αποδέκτη θεωρείται ότι έχει μικρή ταχύτητα οπότε η συμπαράσυρση του περιβάλλοντος ρευστού προς το εσωτερικό της φλέβας εξαιτίας του ζεύγους των στροβίλων μπορεί να αγνοηθεί (Davidson et al., 2002). Επομένως, καθώς η εξίσωση της κατανομής της ταχύτητας w_d είναι γνωστή, δύναται να εξαχθεί η εξίσωση της εγκάρσιας ταχύτητας της φλέβας $u_e = hu$, ολοκληρώνοντας την εξίσωση της συνεχείας. Η εξίσωση που προκύπτει έχει την παρακάτω μαθηματική διατύπωση:

$$u_e = \frac{w_m b_w \cos(\theta - \omega)}{\xi} \left\{ I_1 \left[2s_b + s_1 - \xi \tan(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] - n s_b \exp(-n^2) \right\} - \frac{n}{2} b_w U_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} \quad (2.8)$$

όπου $n = r/b_w$ και $I_1 = [1 - \exp(-n^2)]/2$. Η λογαριθμική κλίση της μείωσης της μέσης αξονικής ταχύτητας s_1 και της αύξησης της διεύρυνσης s_b της φλέβας άνωσης δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$s_1 = \frac{\xi}{w_m} \frac{dw_m}{d\xi} \quad (2.9)$$

$$s_b = \frac{\xi}{b_w} \frac{db_w}{d\xi} \quad (2.10)$$

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους απαρτίζεται από τις εξισώσεις (2.1) έως (2.4), οι οποίες πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\text{Για } r = 0 \quad w = w_m \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega, \quad u = 0, \quad c = c_m, \quad h = 1,$$

για $r = R$ $w = u_a \cos \omega$, $u = u_R + u_a \sin \omega$, $c = 0$, $\overline{u'c'} = \tau_{r\xi} = 0$,
 $h = h_R = 1 - R \sin \varphi (d\omega/d\xi)$.

Η δυναμική πίεση p_d εισάγεται στις εξισώσεις μέσω του συντελεστή λ_M όπως αναφέρθηκε νωρίτερα. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.3), η δυναμική πίεση του τελευταίου όρου του δευτέρου μέλους υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bernoulli:

$$p_d = \frac{\rho_0}{2} \left\{ (u + u_a \sin \omega)^2 + [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega]^2 \right\} \quad (2.11)$$

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (2.1) έως (2.4) προκύπτει το προς επίλυση σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ):

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} = 2\pi R u_e \quad (2.12)$$

$$\frac{d\tilde{m}}{d\xi} = \zeta \sin \omega + 2 \left[\pi R u_e - \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} + \left(\tilde{\mu} \tan \omega + \frac{\pi}{2} R^2 u_a \sin \omega \right) \frac{d\omega}{d\xi} \right] u_a \cos \omega \quad (2.13)$$

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\zeta \cos \omega - \pi R \left(3u_e + \frac{dR}{d\xi} u_a \cos \omega \right) u_a \sin \omega}{\tilde{m} + \left(2\tilde{\mu} + \pi R^2 \frac{dR}{d\xi} u_e \right) u_a \cos \omega + \frac{\pi}{2} R^2 \left[3u_e^2 + u_a^2 \cos^2 \omega - \frac{9}{4} u_a^2 \sin^2 \omega \right]} \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos \omega \right) = S_1 \quad (2.15)$$

όπου $\tilde{\mu} = \pi b_w^2 w_m \cos(\theta - \omega)$ είναι η εισροή όγκου, $\tilde{m} = \lambda_M \frac{\pi}{2} b_w^2 w_m^2 \cos^2(\theta - \omega)$ η εισροή ορμής, $\zeta = g'_0 \pi \lambda^2 b_w^2 c_m$ η εισροή ελλείμματος μάζας και

$\tilde{\beta} = \lambda_B \pi \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} b_w^2 w_m c_m \cos(\theta - \omega)$ η εισροή άνωσης για τη μέση ροή στον άξονα ξ , $u_e = hu$ υπολογίζεται από τις σχέσεις (2.8)-(2.10), λ_M και λ_B είναι συντελεστές που εισάγουν τη συμβολή των τυρβωδών εισροών στις ποσότητες της ορμής και της άνωσης. Ο συντελεστής λ_M είναι σταθερός και λαμβάνει την τιμή 1.10. Οι συντελεστές λ και λ_B υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ημιεμπειρική εξίσωση (Yannopoulos and Bloutsos, 2012):

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi_p} - \left(\frac{1}{\Phi_p} - \frac{1}{\Phi_j} \right) \exp(-0.35 \Xi) \quad (2.16)$$

όπου Φ αντιστοιχεί είτε στο συντελεστή λ είτε στο λ_B . Ο δείκτης p δηλώνει πλούμιο και ο j δηλώνει φλέβα χωρίς άνωση (jet), $\lambda_{Bj} = 1.076$, $\lambda_{Bp} = 1.15$, $\lambda_j = 1.23$ και $\lambda_p = 1.04$ (Yannopoulos, 2006). Η εξίσωση (2.16) επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό της ποσότητας Φ μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής $\Xi = (\xi/D) F_0^{-1}$ με ικανοποιητική

ακρίβεια. Η αδιάστατη αξονική υπερέχουσα ταχύτητα είναι $W_d = (w_d / w_{d0})F_0$ και η αδιάστατη συγκέντρωση $C = c_m F_0$. Το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων συμπληρώνεται με την εξίσωση του ρυθμού διεύρυνσης της φλέβας (2.6). Ο υπολογισμός της γωνίας θ γίνεται γεωμετρικά από το Σχήμα 1, χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$\theta = \omega + \arcsin\left(\frac{u_a}{w_m} \sin \omega\right). \quad (2.17)$$

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

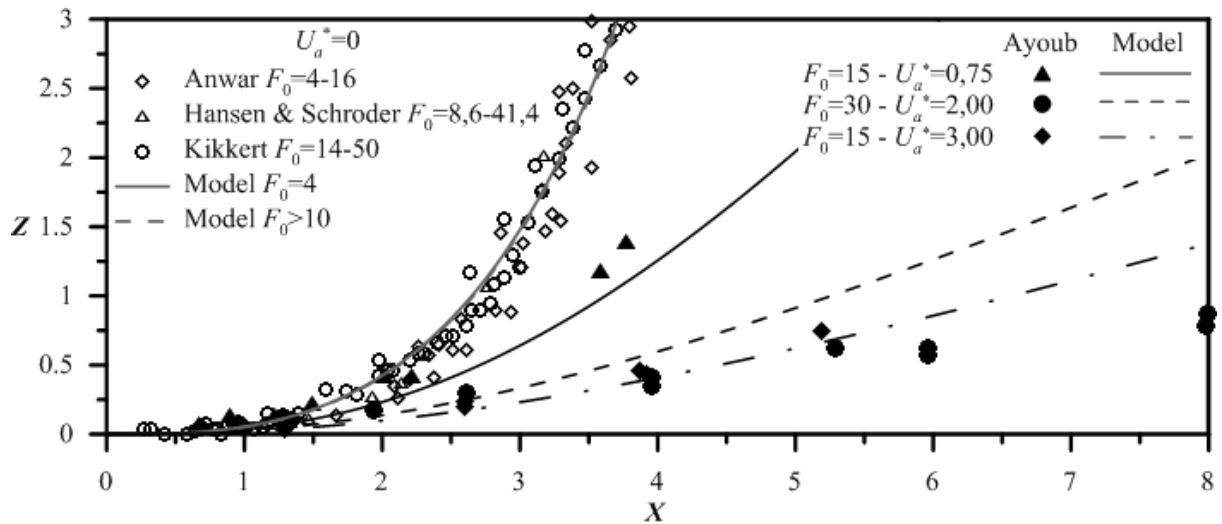
Οι βασικές εξηρημένες μεταβλητές είναι της ποσότητας του όγκου $\tilde{\mu}$, της ποσότητας της ορμής \tilde{m} , της ποσότητας της άνωσης $\tilde{\beta}$ και της γωνίας ω . Το πλήρες σύστημα των εξισώσεων περιλαμβάνει τις βασικές εξισώσεις (2.12) έως (2.15). Όλες οι υπόλοιπες εξισώσεις συνιστούν βοηθητικές σχέσεις για τον προσδιορισμό των υπεισερχομένων παραμέτρων. Η επίλυση των βασικών εξισώσεων πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Runge-Kutta 4^{ης} τάξεως (Kreyszig, 1998). Ο προγραμματισμός του αλγορίθμου έγινε στο λογισμικό Microsoft Excel. Το βήμα αξονικής απόστασης που χρησιμοποιήθηκε ήταν $\Delta\xi = D/10$. Από τις βασικές εξηρημένες μεταβλητές και με τη χρήση των καταλλήλων βοηθητικών σχέσεων υπολογίστηκαν οι τιμές όλων των υπολοίπων παραμέτρων. Ο υπολογισμός των συντεταγμένων x και z του άξονα της ανωστικής φλέβας υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta\xi \cos \omega \quad \text{και} \quad z_{i+1} = z_i + \Delta\xi \sin \omega \quad (3.1)$$

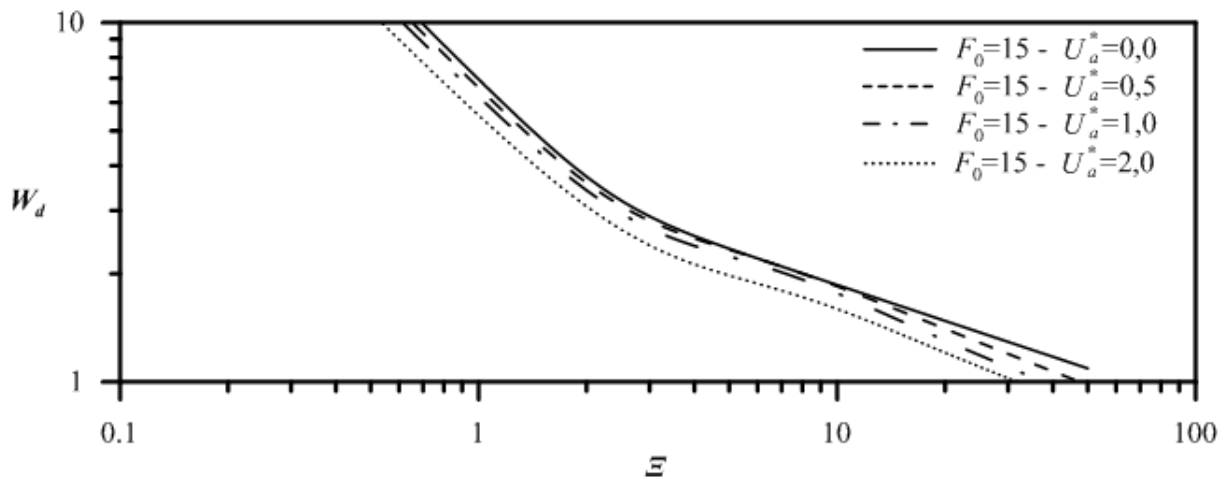
για $i=1$ έως N βήματα και $x_0 = z_0 = 0$. Η προβλεπόμενη τροχιά της φλέβας φαίνεται στο Σχήμα 1 σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα της βιβλιογραφίας (Ayoub, 1971).

Στο διάγραμμα του Σχήματος 2 παρουσιάζονται τρεις διαφορετικές επιλύσεις του προβλήματος σε αδιάστατους άξονες X, Z , όπου $X = (x/D)F_0^{-1}$ και $Z = (z/D)F_0^{-1}$. Παρατηρείται ότι το μοντέλο που προτείνεται προβλέπει αρκετά ικανοποιητικά τις τροχιές, συγκρινόμενο με τα αντίστοιχα πειραματικά σημεία του Ayoub (1971). Στο διάγραμμα του ίδιου Σχήματος παρατίθεται και η περίπτωση του ήρεμου αποδέκτη ($U_a^* = 0$). Η σύμπτωση του μοντέλου, όπως περιγράφεται από τους Yannopoulos & Bloutsos (2012), είναι εξαιρετική συγκρινόμενη τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα των Hansen & Schroder (1968), Anwar (1972) και Kikkert (2006).

Τα αποτελέσματα της μεταβολής της ανηγμένης αξονικής ταχύτητας W_d ως προς την αξονική απόσταση X δίδονται στο διάγραμμα του Σχήματος 3. Παρουσιάζονται οι περιπτώσεις για ακίνητο αποδέκτη για τρεις τιμές της μεταβλητής $U_a^* = 0,5, 1,0$ και $2,0$. Στο διάγραμμα του Σχήματος 4 παρουσιάζονται οι ανηγμένες αξονικές αραιώσεις $S=1/C$ συναρτήσεως των αντιστοίχων τεταγμένων. Οι προβλέψεις συγκρίνονται με τις αντίστοιχες τιμές των πειραματικών δεδομένων που αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία (Ayoub, 1971).

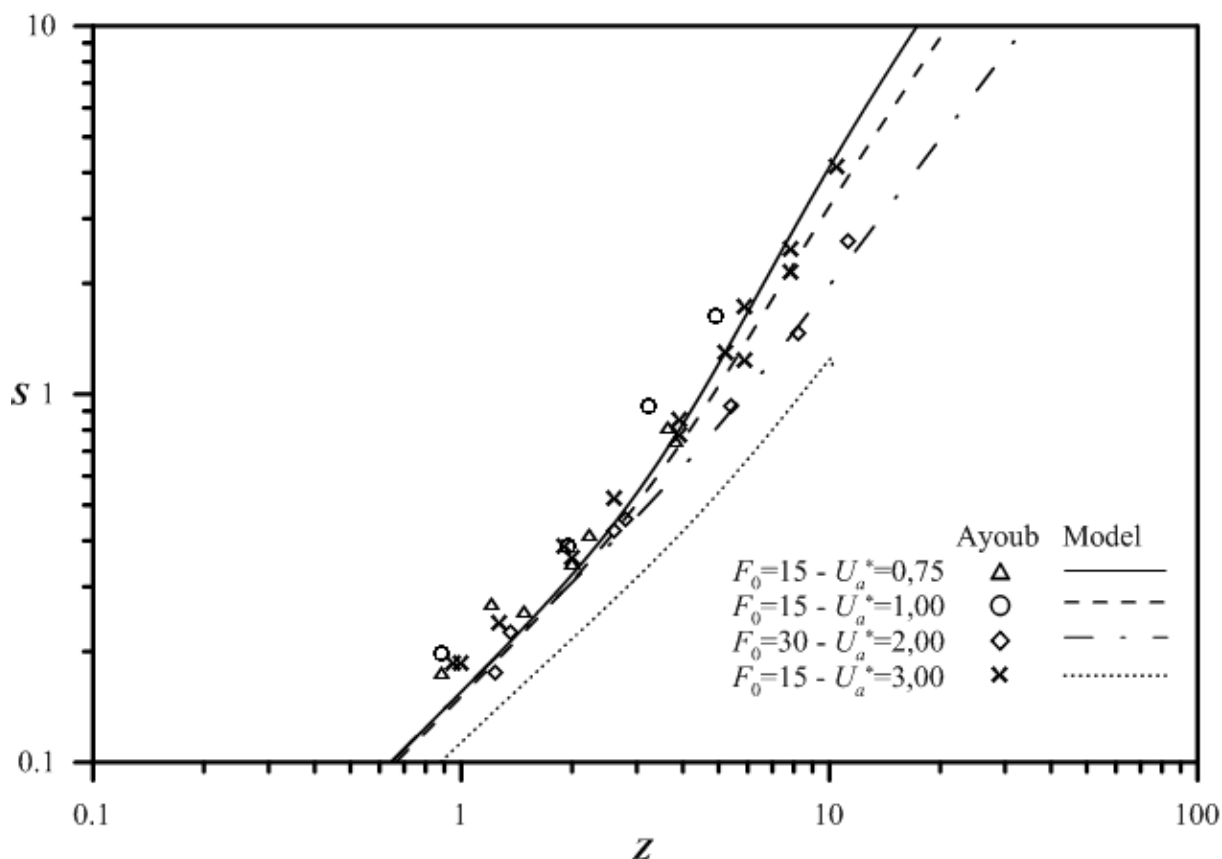


Σχήμα 2: Προσομοίωση τροχιάς οριζόντιας κυκλικής φλέβας με άνωση εντός κινούμενου αποδέκτη και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα



Σχήμα 3: Προσομοίωση μεταβολής αξονικής ταχύτητας W_d οριζόντιας κυκλικής φλέβας με άνωση εντός κινούμενου αποδέκτη.

Η σύμπτωση των προβλέψεων του μοντέλου με τα πειραματικά δεδομένα είναι πολύ καλή εκτός της περίπτωσης $F_0 = 15$ και $U_a^* = 3,0$ όπου παρατηρείται εμφανής απόκλιση μεταξύ των σημείων και της αντίστοιχης καμπύλης. Η συγκεκριμένη απόκλιση είναι φανερό ότι οφείλεται είτε σε πειραματικό σφάλμα είτε σε σφάλμα παρουσίασης των αποτελεσμάτων καθώς εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί αυτό αν εξεταστούν τα συγκεκριμένα πειραματικά σημεία σε σχέση με εκείνα των υπολοίπων περιπτώσεων.



Σχήμα 4: Προσομοίωση αραίωσης S οριζόντιας κυκλικής φλέβας με άνωση εντός κινούμενου αποδέκτη και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.

4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία προτείνεται ένα ολοκληρωματικό μοντέλο 2ας τάξεως κυκλικής οριζόντιας τυρβώδους ανωστικής φλέβας σε κινούμενο αποδέκτη. Η μαθηματική περιγραφή του φαινομένου γίνεται σε σύστημα καμπυλόγραμμων κυλινδρικών συντεταγμένων. Η ολοκλήρωση των εξισώσεων συνεχείας, ορμής και διατήρησης της μάζας του ιχνηθέτη γίνεται χωρίς την παράλειψη των όρων 2ας τάξεως, εκτός εκείνων του μοριακού ιξώδους. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα παρουσιάζοντας αρκετά καλή συμπεριφορά.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Οι συγγραφείς ευχαριστούν την Επιτροπή Ερευνών του Πανεπιστημίου Πατρών για τη χρηματοδότηση της παρούσα έρευνας με κωδ. C.148 από το Πρόγραμμα «Κ. Καραθεοδωρή 2007-2010».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Anwar, H. O. 1972. *Measurements on horizontal buoyant jets in calm ambient fluid*. La Houille Blanche, 27: 311-320
- Ayoub, G. M. 1971. *Dispersion of buoyant jets in a flowing ambient fluid*. PhD. Imperial College, London, 904pp.
- Chu, P.C.K., Lee, J.H. and Chu, V.H. 1999. *Spreading of turbulent round jet in coflow*. Journal of Hydraulic Engineering, 125, 2: 193-204.

- Davidson M.J., Gaskin S. and Wood I.R. 2002. *A study of a buoyant axisymmetric jet in a small co-flow*. Journal of Hydraulic Research, 40, 4: 477-489.
- Davidson, M.J. and Wang, H.J. 2002. *Strongly advected jet in coflow* Journal of Hydraulic Engineering, 128, 8: 742-752.
- Doneker, R.L. and Jirka, G.H. 1988-2007. *CORMIX User Manual. A Hydrodynamic Mixing Zone Model and Decision Support System for Pollutant Discharges into Surface Waters*. Technical Report, EPA-823-K-07-001, Project Officer: H. Biswas, Washington.
- Fischer, H. B., List, E. J., Koh, R. C. Y., Imberger, J. and Brooks, N. H. 1979. *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, New York.
- Jirka, G.H. 2004 *Integral model for turbulent buoyant jets in unbounded stratified flows Part I: Single round jet*. Environmental Fluid Mechanics, 4: 1-56.
- Hansen, J. and Schroder, H. 1968 *Horizontal Jet Dilution Studies by Use of Radioactive Isotopes*. Acta Polytechnica Scandinavica, 49. Danish Academy of Technical Sciences
- Kikkert, G.A. 2006. *Buoyant jets with two and three dimensional trajectories*. Ph.D. Dissertation, University of Canterbury, Christchurch. New Zealand, 353pp.
- Kim, Y.D., I.W. Seo, Kang, S.W. and Oh, B.C. 2002. *Jet integral-particle tracking hybrid model for single buoyant jets*. Journal of Hydraulic Engineering, 128, 8: 753-760.
- Knudsen, M. 1988. *Buoyant horizontal jets in an ambient flow*. PhD. Univ. of Canterbury. Christchurch. New Zealand, 168pp.
- Kreyszig, E. 1998. *Advanced engineering mathematics – 9th Edition*. Willey, 1246pp
- Lee, J.H.W and Jirka, G.H. 1981. *Vertical round buoyant jet in shallow water*. Journal of the Hydraulics Division, 107, 12: 1651-1675.
- Lee, J. and II Won Seo 2000. *Numerical simulation of advected thermal using Gaussian-Vortex model*. Journal of Engineering Mechanics, 126, 10: 1098-1106.
- Lee, J.H.W. and Chu, V.H. 2003. *Turbulent jets and plumes – A Lagrangian approach*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 391pp.
- Schatzmann, M. 1979. *An integral model of plume rise*. Atmospheric Environment, 13, 5: 721-731.
- Schnelle, K. B. Jr. and Dey, P. R. 2000. *Atmospheric dispersion modeling compliance guide*. McGraw-Hill, New York, 560pp.
- Wood, I.R., Bell, R.G. and Wilkinson, D.L. 1993. *Ocean disposal of wastewater*. World Scientific, Singapore, 425pp.
- Wright, S.J. 1994. *The effect of ambient turbulence on jet mixing*. In: P.A. Davies and M. J. Valente Neves (Editors), Recent research advances in the fluid mechanics of turbulent jets and plumes. Kluwer Academic. Dordrecht. The Netherlands.
- Yannopoulos, P.C. 2006. *An improved integral model for plane and round turbulent buoyant jets*. Journal of Fluid Mechanics, 547: 267-296.
- Yannopoulos, P. C. and Bloutsos, A.A. 2012. *Escaping mass approach for inclined plane and round buoyant jets*. Journal Fluid Mechanics, 695: 81-111.